

ルジャンドル予想の証明不可能性の証明

T.Nakashima

概要

この論文では未解決問題として知られたルジャンドル予想の証明不可能性の証明を試みる。この手法は筆者の「超準解析を用いたリーマン予想の証明不可能性の推測」と同様のものであり、超準解析が許す無限大を利用して否定モデルを作り肯定命題が証明不可能であるとするものである。

1

次の命題を仮定する。

命題 1. リーマン予想

$$\pi(x) = li(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

は証明不可能である。

Proof. 詳しくは筆者の論文 [2] を参照されたい。この証明不可能性は主に次の「歪められた関数」の存在による。以下手法をまねて超準解析で話を進める。ある素数 P において $\pi(P)$ を 1 でなく $M \gg 1$ 増やす。超準解析では無限大を使用することが許されるので P を無限大とし無矛盾な否定モデルを作る。

通常の公理系で

$$\pi(x) < li(x) + Kx^{\frac{1}{2}+\epsilon}$$

が成り立ち、超準解析で「歪められた関数」を取ることで

$$\pi(x) > li(x) + Kx^{\frac{1}{2}+\epsilon}$$

が成り立つ場合、この命題は証明不可能である。(反証は可能である。) $\square$

定理 1. (ルジャンドル予想の独立性) n^2 から $(n+1)^2$ の間に一つは素数が存在すること (ルジャンドル予想) は証明不可能 (独立命題) である。

Proof. ある数 N とその次の数 $N+1$ を考える。そして超準解析で考えて N を超準解析が許す無限大とする。そして N と $N+1$ の間の間隔を広く考える。この時あらかじめ間隔を $2\sqrt{N}+1$ よりも大きく $3N^{\frac{2}{3}}+3N^{\frac{1}{3}}+1$ 以下 (証明不可能なところまで) に取っておく。(証明不可能なところがあると仮定する。後で見るようにこれはありそうな仮定である。) これは無矛盾なモデルを導き、超準解析におけるルジャンドル予想の反例を与える。超準解析における超実数 ${}^*\mathbb{R}$ の元は $[\langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle] (a_i \in \mathbb{R})$ と書ける。 $\mathbb{R}$ と ${}^*\mathbb{R}$ の間には $n = [\langle n, n, n, \dots \rangle]$ という式が成り立つ。([1]p7, definition 1.9.) さらに $[\langle 1, 2, 3, \dots \rangle] > [\langle n, n, n, \dots \rangle]$ という関係式よりこの $[\langle 1, 2, 3, \dots \rangle]$ が無限大の条件を満たしていることがわかるがこれには厳密には超フィルター ([1]p4) の概念が必要である。この表記法をもちいて $N = \infty$ として $[\langle 1, 2, 3, \dots \rangle]$ をとったとして、 $N+1$ を $[\langle 1 + \psi_1, 2 + \psi_2, 3 + \psi_3, \dots \rangle] (2\sqrt{n} + 1 < \psi_n \leq 3n^{\frac{2}{3}} + 3n^{\frac{1}{3}} + 1)$ (証明不可能なところまで) のように取ることができる。

ベルトランの公準について。 N から $2N$ までの間に素数が存在することが知られている。間隔を大きくする際に N から $N+1$ までの間隔が N に当たるような間隔の取り方は N から N の間隔をとるようなもので、最初の数 1 と間隔 N を合わせると $N+1$ となるため、ナンセンスであり、ベルトランの公準は問題なく証明可能であるということである。この議論で得られる閾値は「理論的閾値」である。

さらにハロルドクラメル ([3]) によるとリーマン予想から

$$p_{n+1} - p_n = O(\sqrt{p_n} \log p_n)$$

が成り立つことが示されている。素数の間隔が $\sqrt{p_n} \log p_n > 2\sqrt{p_n} + 1$ であるような条件に迫るところにルジャンドル予想の証明不可能性の閾値はあるものとして計算すると、それは $2\sqrt{N}+1$ よりも大きく $3N^{\frac{2}{3}}+3N^{\frac{1}{3}}+1$ よりも少ないという条件を満たす。 $(p_{n+1} - p_n)$ はあくまで評価式として $\sqrt{p_n} \log p_n$ の近くを取るものとしてよい。) あらかじめ間隔を $2\sqrt{N}+1$ よりも大きく $3N^{\frac{2}{3}}+3N^{\frac{1}{3}}+1$ よりも少なく (証明不可能なところまで) 取った仮定がここで効く。この手法で得られる閾値を「实际的閾値」と呼ぶ。残念ながらリーマン予想の真偽にかかわらずルジャンドル予想が証明できる可能性もある。過去の歴史を振り返るとルジャンドル予想は証明不可能であることがありそうである。(ここで先述の証明不可能の仮定が得

られる。)

n^3 から $(n+1)^3$ までの間に素数が存在することは証明されている。そこで証明可能な領域から n^2 から $(n+1)^2$ の間のような証明不可能な領域にいたる閾値が明確に存在するようなモデルが実際には適当である。

何もしない場合。つまり通常の数学だとルジャンドル予想は「おそらく」正しい。しかしながら超準解析によるモデルだとルジャンドル予想は偽である。つまりルジャンドル予想は証明不可能な命題つまり独立命題である。

超準解析でのモデルと普通の数学の共通部分がルジャンドル予想の肯定証明を含んでいるならば、超準解析で否定モデルが作れるわけがない。ルジャンドル予想の否定命題は証明可能であるが、肯定命題は拡張の片方で否定が作れる以上、証明不可能である。

□

超準解析における移行原理について。無限大は外的集合に含まれる。素数定理はルジャンドル予想の否定モデルと共存できないが、無限大では移行原理が適応できないため問題なく筆者の構成による無限大でのルジャンドル予想の否定モデルが作れる。

参考文献

- [1] "An Introduction to Nonstandard Real Analysis", A. E. Hurd, P. A. Loeb. Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, Columbia University, New York.
- [2] "'Guessing that the Riemann Hypothesis is unprovable using Non-Standard Analysis" T. Nakashima, Vixra. org. Number theory
- [3] "On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers"; Cramer, Harold, Acta arithmetica 2; 23-46