趙準解析を用いたリーマン予想の証明不可能性の推測

T.Nakashima

概 要

リーマン予想とは (”Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse” B.Riemann) にて扱われたいくつかの予想のうち現在まで、165 年間未解決であった最後の予想である。その主張するところはリーマンゼータ関数の非自明なゼロ点の実部は 1/2 である。というものである。非常に難解で有名なこの予想は歴史的に多くの数学者の挑戦を拒み続けてきた。この論文ではリーマン予想と同値な命題の独立性（証明不可能性）の推測をする。本稿で扱うのはメビウス関数に関するリーマン予想と同値な命題である。まず最初に同値性の証明をし、次に’「歪められたメビウス関数」というものを定義する。次にその「歪められたメビウス関数」が定義できリーマン予想が成立しない公理系とリーマン予想が成立する公理系を考える。最後にリーマン予想が証明不可能であることを推測する。

1

メビウス関数 $\mu(n)$ を次で定義する。

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{偶数個の相異なる素数の積} \\ -1 & \text{奇数個の相異なる素数の積} \\ 0 & \text{ある素数の 2 乗で割れる時} \end{cases}$$

リーマン予想とは ζ 関数の非自明なゼロ点の実部が 1/2 であることである。(Ivić[3]p44)

定理 1. *(Ivić[3]p48,Titchmarsh[5] p370, Theorem 14.25)*

$$\textit{the Riemann Hypothesis} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{m} \mu(n) = O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

短い証明として次のようなものが知られている。
$M(x)$ を次で定義する。

$$M(x) := \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n)$$

すると

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \int_{x=0.1}^{\infty} x^{-s} d(M(x))$$

$d(M(x))$ は $M(x)$ のスティルチェス積分である。

$$= [M(x)x^{-s}]_{0.1}^{\infty} + s\int_{x=0.1}^{\infty} M(x)x^{-s-1}dx = s\int_{x=0.1}^{\infty} M(x)x^{-s-1}dx$$

ここでこの値が有限であるところまで $\frac{1}{\zeta(s)}$ を解析接続する。$\sum_{n=1}^{m} \mu(n) = O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$ が成り立つとき $Re(s) > 1/2$ でこの積分は有限である。$Re(s) > 1/2$ にゼータ関数の零点がないことを得る。さらに関数等式に関する議論と合わせてリーマン予想を得る。

逆にリーマン予想を仮定すると

$$s\int_{x=0.1}^{\infty} M(x)x^{-s-1}dx$$

は $Re(s) > 1/2 + \epsilon > 1/2$ で無限大でない。

$$|M(x)| < Km^{\frac{1}{2}+\epsilon}$$

を得る。ϵ は任意に少なくとれる。

命題 1.

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(n) = O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

この命題の証明不可能性を推測する。これは定理 1 によりリーマン予想と同値である。

以後、リーマン予想が真である場合とリーマン予想が偽である 2 つのモデルを作るため 2 通りの公理系で考える。まず実数、複素数が満たす公理系にリーマン予想が真であることを付け加えた公理系。これは完備化公理を満たしている。一方、超準解析が満たす公理系。超準解析がその存在を許す無限大、無限小 ([1]) の概念は完備化公理を満たしていな

い。ここで無限小とはいかなる正の数よりも少ない正の数で、無限大は無限小の逆数でいかなる有限の数よりも大きい数である。明らかにコーシー列は無限小の中で絶対に収束しない。（例えば無限小の例として $< 1/1, 1/2, 1/3, \cdots >\leq 1/n =< 1/n, 1/n, \cdots >$ が考えられる。無限大の例として $< 1, 2, 3, \cdots >\geq n =< n, n, \cdots >$ が考えられる。(Hard and Loeb[1]))

以後、超準解析のなかで考える。「歪められたメビウス関数の和」を $\sum_{n\leq P-1}\mu(n)+f(P)$ と定める。これは（P(P は素数) までの）メビウス関数の和において P で大きな実数値 (ここでは $f(P)$ と表すが）を $\mu(P)$ の代わりに加える（もしくは減ずる）としたものである ($f(P)$ の符号は自由にとれる。これはメビウス関数の乗法性による)。超準解析によって $P \to \infty$(P は素数) とする。$P * M$ での「歪められたメビウス関数を $f(P) * \mu(M)$ と定める。（M が P で割り切れるときは 0 とする。）P から無限にこの値は定めていくことができる。大事なのは無限に大きく計算していっても矛盾が発生しないことである。P での値のみが以後必要なので P までのメビウス関数の和を自由に定めてよいことしか考えない。$P \to \infty$(P は素数) でのメビウス関数の和はある程度任意に定めることができる。（ちなみに $P < m < 2P$ を満たす任意の m に対してもメビウス関数の和をある程度任意にとれる。）(後で使う形は 2 通りあって、まず $|\sum_{n\leq P-1}\mu(n)+f(P)| = KP^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}$ で $P \to \infty$(超準解析における無限大の存在性を使用)(P は素数) の場合で、ϵ_0 は超準解析における無限小とする。次に $|\sum_{n\leq P-1}\mu(n)+f(P)| = KP^{\frac{2}{3}}$ で $P \to \infty$(P は素数) の場合である。「歪められたメビウス関数の和」の正当性は先ほどの定理 1 の簡易証明によれば $|f(P)| = P^{\sigma}$ のとき $Re(s) > \sigma + \epsilon'$ に対して

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s} = \lim_{P\to\infty}(\frac{\mu(1)}{1^s}+\frac{\mu(2)}{2^s}+\cdots+\frac{f(P)}{P^s})$$

が成り立つことによる。つまり P で $f(P)$ を取るとこの時 $\zeta(s)$ は $Re(s) > 1/2$ にゼロ点を持つ。ゼロ点の形は $s = (1/2+\epsilon_0)+ti, s = \sigma+\infty i$ であろうと推測されるがあまりこの議論は正確でない。ここはメビウス関数について (超準解析において) 「歪められたメビウス関数」を取ってもよいことのみしか扱わないことにする。

注意：命題 1 が成立しない場合を考えているようだがそもそも「歪められたメビウス関数」を考えている時、リーマン予想不成立を考えているため命題 1 は成り立たなくて良い。

予想 1. リーマン予想は証明不可能である。しかしながら反証は可能である。

命題 1 に言うようなメビウス関数に関するリーマン予想を考える。

最初に (実数の中で) リーマン予想の否定命題が証明できる場合を考える。これは一つの可能性である。以下通常の公理系のうえでは命題 1 の反例はないものとする。

次にリーマン予想の肯定命題が証明不可能であることを示す。

モデル A として

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(n) = O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

が全ての m に対して成り立つ場合とする。実数、複素数の公理系に加えてリーマン予想が真であることを仮定する。

モデル B として超準解析で無限小と無限大を考える。2 通り考える。

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(n) = O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon_0})$$

がある無限小 $\epsilon_0 > 0$ に対して成り立つ場合で $m = \infty$ の場合。

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(n) = O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

が $m = \infty$ で成り立たない場合とする。

モデル A がリーマン予想が真のモデル。モデル B がリーマン予想が偽のモデルである。

命題 1 に反例はない。実数を考えた場合モデル A が成り立つ。モデル A は ZFC で実数を考えた時「無矛盾」である。(モデル A は互いに矛盾しない式から成り立っている。このような時「無矛盾」であると言われる。(K.Kunen[4] 序章 §1))

モデル B の一番目と 2 番目の場合 $m = P$ に対して「歪められたメビウス関数の和」をうまくとる。$P \to \infty$(P は素数) とする。すると $m = \infty$ でモデル B が真となる。モデル B は超準解析の意味において「無矛盾」である。

モデル A とモデル B の場合はどちらも実数、複素数の拡張であり片方

で真、片方で偽である。つまり実数、複素数はリーマン予想を解くのに不十分な公理系である。（完備性はこの議論には現れないのに注意。）このような時リーマン予想は証明不可能である。(K.Kunen[4] 序章 §1)

可能性としてありうるのはリーマン予想の否定命題が証明可能であるか、リーマン予想の肯定命題が証明不可能であるかのいずれかである

2 同値な命題

リーマン予想の同値な命題 3 つについて証明不可能性を述べる。

命題 2.

$$\pi(x) = li(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

超準解析において $\pi(x)$ がある素数 P で $g(P) > 1$ をとるような変形を許すとして $P \to \infty$ での状況と

$$\pi(x) = O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon_0})$$

がある無限小 $0 < \epsilon_0$ に対して成り立つ場合 ($m = \infty$ とする) を考える。メビウス関数の時と同様に 2 通りの相反するモデルが成り立ちそれらは無矛盾であることも同様にわかる。したがって証明不可能である。むろん反証することも可能であることまで同等である。

命題 3.

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log\log n (for\ n > 5040)$$

超準解析において $\sigma(n)$ のある充分大きな素因数 P に対して P に関する約数 AP^s を全て $AP^s \times h(P)^s (h(P) > 1)$ で置き換える。この命題だと「不等号」なのである数一つだけが不等号を満たさないモデルで充分であることに注意する。なぜなら前の 2 つと違って $\sigma(n)$ は n によって変化してしまい「定量的」扱いをすべきでないからである。無限大を考えることによってやはり同様に 2 つの無矛盾なモデルを作ることができる。むろんこの場合も不等号が有限の範囲内で成り立たないという場合を見つければ反証可能である。

命題 4. リーマンゼータ関数の非自明なゼロ点は $Re(s) = 1/2$ 上にしかない。

この場合半分だけ予想になってしまう。やはり超準解析の中で考える。$Re(s) > 1/2$ に対して $s = Re(s) + \infty i$ の形に書けるリーマンゼータ関数のゼロ点が存在する可能性がある。（ないかもしれない。）

これについてはいくらかの計算結果でしかみることができなかった。

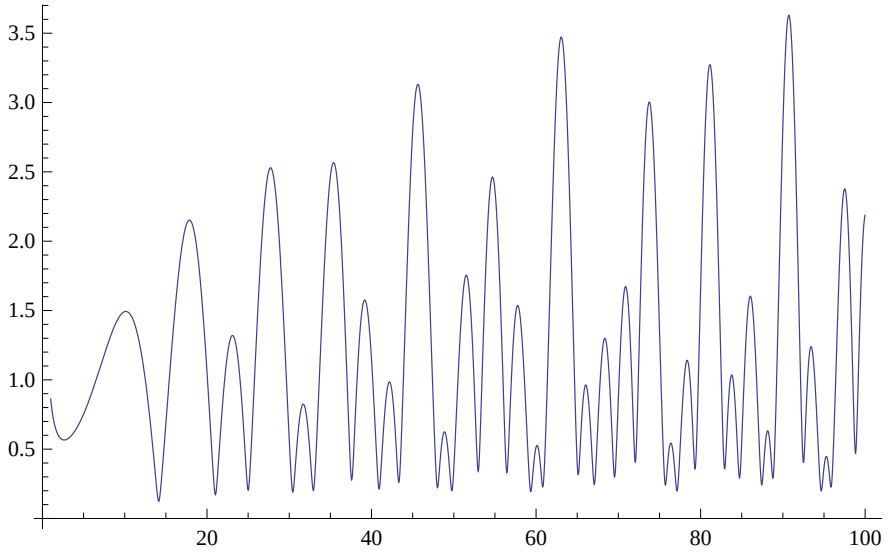

図 1: Ｐｌｏｔ［Ａｂｓ［Ｚｅｔａ[2/3+s I]］,(s, 1, 100)]

むろん全ての値を調べているわけでもなく、だんだんゼロに近づくような気がする結果でしかない。もちろんこの予想を満たす実例は存在しないかもしれない。実数値部分 2/3 を 1/2 よりも少ない数で置き換えてしまうとより結果は悪くなりゼロに近づくとは到底思えない。

$\zeta(s) = 0, Re(s) = 1/2$だとすると無限小$\epsilon_0$に対して$\zeta(s+\epsilon_0) = 0, Re(s+\epsilon_0) \neq 1/2$ としてよい。超準解析において $s + \epsilon_0$ でリーマンゼータ関数が正則であり連続でもあるように定義したものがこれである。この条件だけでも充分にリーマン予想の証明不可能性をいうことができる。この証明不可能性にはちょっと考えたくないシナリオが含まれる。それは証明不可能であって、反証は可能である。ということは少ない数からゼロ点の反例を探していくことはできるが、リーマン予想の証明はこの方向ではできないということになる。ということである。

念のためまとめておくとリーマン予想は真もしくは偽であるが、より

広い公理系においてリーマン予想が偽であるモデルが作れる。つまりリーマン予想が真であることは証明不可能であるが、偽であることは以前として証明可能であるということである。

注意: 超準解析における移行原理について。無限大は外的集合に含まれる。素数定理とリーマン予想の素数に関する否定モデルと共存できないが、無限大では移行原理が適応できないため問題なく筆者の構成による無限大でのリーマン予想の否定モデルが作れる。

Special Thanks
私の友人である H.Tokitu 君に英語の翻訳で大変お世話になりました。この場を借りて感謝を述べたいと思います。

参考文献

[1] ” An Introduction to Nonstandard Real Anaiysis”, A. E. Hard, P. A. Loeb. Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, Columbia University, Ney York.

[2] “Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse”,B. Riemann, Monatsberichte der Berliner Akademie. In Gesammelte Werke, Teubner, Leipzig (1892)

[3] ”The Riemann Zeta-function”, Ivić. A, Dover Press

[4] ”Set Theory An Introduction To Independence Proofs”, Kunen. K. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics,Volume 102.

[5] The theory of the Riemann Zeta function, Titchmarsh. E,. C., Clarendon Press Oxford (1996)