リーマン予想の証明不可能性の推測

T.Nakashima

概 要

リーマン予想とは ("Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" B.Riemann) にて扱われたいくつかの予想のうち現在まで、163 年間未解決であった最後の予想である。その主張するところはリーマンゼータ関数の非自明なゼロ点の実部は 1/2 である。というものである。非常に難解で有名なこの予想は歴史的に多くの数学者の挑戦を拒み続けてきた。この論文ではリーマン予想と同値な命題の独立性（証明不可能性）の推測をする。本稿で扱うのはメビウス関数に関するリーマン予想と同値な命題である。まず最初に同値性の証明をし、次に'「歪められたメビウス関数」というものを定義する。最後にその「歪められたメビウス関数」を使って無限大において 2 通りの無矛盾なモデリングが可能であることからリーマン予想が証明不可能であることを推測する。

1

メビウス関数 $\mu(n)$ を次で定義する。

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{偶数個の素数の積} \\ -1 & \text{奇数個の素数の積} \\ 0 & \text{ある素数の 2 乗で割れる時} \end{cases}$$

リーマン予想とは ζ 関数の非自明なゼロ点の実部が 1/2 であることである。(Ivić[11]p44)

定理 1. *(Ivić[11]p48,Titchmarsh[17] p370, Theorem 14.25)*

$$\textit{the Riemann Hypothesis} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{m} \mu(n) = O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

短い証明として次のようなものが知られている。
$M(x)$ を次で定義する。

$$M(x) := \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n)$$

すると

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \int_{x=0.1}^{\infty} x^{-s} d(M(x))$$

$d(M(x))$ は $M(x)$ のスティルチェス積分である。

$$= [M(x)x^{-s}]_{0.1}^{\infty} + s\int_{x=0.1}^{\infty} M(x)x^{-s-1}dx = s\int_{x=0.1}^{\infty} M(x)x^{-s-1}dx$$

ここでこの値が有限であるところまで $\frac{1}{\zeta(s)}$ を解析接続する。$\sum_{n=1}^{m} \mu(n) = O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$ が成り立つとき $Re(s) > 1/2$ でこの積分は有限である。$Re(s) > 1/2$ にゼータ関数の零点がないことつまりーマン予想を得る。

逆にリーマン予想を仮定すると

$$s\int_{x=0.1}^{\infty} M(x)x^{-s-1}dx$$

は $Re(s) > 1/2 + \delta > 1/2$ で無限大でない。すると $\epsilon < \delta$ に対して

$$|M(x)| < Km^{\frac{1}{2}+\epsilon}$$

を得る。δ は任意に少なくとれるから

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(n) = O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

を得る。

命題 1.

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(n) = O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

この命題の証明不可能性を推測する。これは定理 1 によりリーマン予想と同値である。

「歪められたメビウス関数の和」を $\sum_{n \le P-1} \mu(n) + f(P)$ と定める。こ

れは（P(Pは素数) までの）メビウス関数の和においてPで大きな実数値（ここでは$f(P)$と表すが）を$\mu(P)$の代わりに加える（もしくは減ずる）としたものである。$P \to \infty$(Pは素数) とする。$P * M$での「歪められたメビウス関数を$f(P) * \mu(M)$と定める。（MがPで割り切れるときは0とする。）Pから無限にこの値は定めていくことができる。大事なのは無限に大きく計算していっても矛盾が発生しないことである。Pでの値のみが以後必要なのでPまでのメビウス関数の和を自由に定めてよいことしか必要ではない。$P \to \infty$(Pは素数) でのメビウス関数の和はある程度任意に定めることができる。（ちなみに$P < m < 2P$を満たす任意のmに対してもメビウス関数の和をある程度任意にとれる。）(後で使う形は2通りあって、まず$|\sum_{n \le P-1} \mu(n) + f(P)| < KP^{\frac{1}{2}+\epsilon}$で$P \to \infty$($P$は素数) の場合である。次に$|\sum_{n \le P-1} \mu(n) + f(P)| = KP^{\frac{2}{3}}$で$P \to \infty$($P$は素数) の場合である。($|\sum_{n \le P-1} \mu(n) + f(P)| > P$は実際にはあり得ない値である。この場合は考えない。)
「歪められたメビウス関数の和」の正当性は先ほどの定理1の簡易証明によれば$|f(P)| = P^{\sigma}$のとき$Re(s) > \sigma + \epsilon'$に対して

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \lim_{P \to \infty} \sum_{n=1}^{P} \frac{\mu(1)}{1^s} + \frac{\mu(2)}{2^s} + \cdots + \frac{f(P)}{P^s}$$

が成り立つことによる。つまりPで$f(P)$を取るとこの時$\zeta(s)$は$Re(s) > 1/2$にゼロ点を持つ。ゼロ点の形は$s = \sigma + \infty i$であろうと推測されるがあまりこの議論は正確でない。ここはメビウス関数について「歪められたメビウス関数」を取ってもよいことのみしか扱わないことにする。

予想 1. リーマン予想は証明不可能である。つまりリーマン予想は「独立命題」である。

命題1に言うようなメビウス関数に関するリーマン予想を考える。全体の公理系をZFC(K.Kunen[12] 序章 §1) とする。

最初にリーマン予想が成り立たない場合を考える。（リーマン予想が証明不可能であることとこれは違う。）これは一つの可能性である。この時リーマン予想の否定命題が証明できることになる。以下有限の範囲には命題1の反例はないものとする。

次にリーマン予想の肯定命題が証明不可能であることを示す。

モデル A として

$$\sum_{n=1}^{m}\mu(n)=O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

が全ての m に対して成り立つ場合（$m=\infty$ を含む）とする。

モデル B として

$$\sum_{n=1}^{m}\mu(n)=O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

が $m=\infty$ で成り立たない場合とする。

命題 1 に有限の範囲では反例はない。有限の範囲でモデル A が成り立つ。$m=P$ に対して「歪められたメビウス関数の和」を $|\sum_{n\leq P-1}\mu(n)+f(P)|<KP^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ で $P\to\infty(P$ は素数$)$ とする。すると $m=\infty$ でモデル A が真となる。モデル A は ZFC で「無矛盾」である。（モデル A は互いに矛盾しない式から成り立っている。このような時「無矛盾」であると言われる。(K.Kunen[12] 序章 §1)）

$m=P$ に対して「歪められたメビウス関数の和」を $|\sum_{n\leq P-1}\mu(n)+f(P)|=KP^{\frac{2}{3}}$ とする。$P\to\infty(P$ は素数$)$ とする。すると $m=\infty$ でモデル B が真となる。モデル B は ZFC において「無矛盾」である。

このような時リーマン予想は理論から独立であり、証明不可能である。(K.Kunen[12] 序章 §1)

可能性としてありうるのはリーマン予想の否定命題が証明可能であるか、リーマン予想の肯定命題が証明不可能であるかのいずれかである。

Special Thanks
私の友人である H.Tokitu 君に英語の翻訳で大変お世話になりました。この場を借りて感謝を述べたいと思います。

参考文献

[1] "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse",B. Riemann, Monatsberichte der Berliner Akademie. In Gesammelte Werke, Teubner, Leipzig (1892)

[2] "The convergence of Euler products", de Branges, Louis, Journal of Functional Analysis 107 (1)(1992)122-210

[3] "Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function", Connes, Alain, Selecta Mathematica. New Series 5 (1)(1999)29-106

[4] "Noncommutative geometry and the Riemann zeta function", Connes, Alain, Mathematics: frontiers and perspectives, Providence, R.I.: American Mathematical Society, (2000)35–54

[5] "More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line",Conrey, J. B., J. Reine angew. Math. 399(1989)1-16

[6] "The Riemann Hypothesis"Conrey, J. Brian, Notices of the American Mathematical Society(2003)341-353

[7] "A note on some positivity conditions related to zeta and L-functions", Conrey, J. B.; Li, Xian-Jin , International Mathematics Research Notices 2000 (18)(2000)929-940

[8] "Birds and frogs", Dyson, Freeman, Notices of the American Mathematical Society 56 (2)(2009)212-223

[9] "Sur les Zéros de la Fonction $\zeta(s)$ de Riemann", Hardy, G. H., C. R. Acad. Sci. Paris 158(1914) 1012-1014

[10] "The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line", Hardy, G. H.; Littlewood, J. E., Math. Z. 10 (3-4)(1921)283-317

[11] "The Riemann Zeta-function", Ivić. A, Dover Press

[12] "Set Theory An Introduction To Independence Proofs", Kunen. K. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics,Volume 102.

[13] "The Riemann hypothesis", Littlewood, J. E., The scientist speculates: an anthology of partly baked idea, New York: Basic books(1962)

[14] "The pair correlation of zeros of the zeta function", Montgomery, Hugh L., Analytic number theory, Proc. Sympos. Pure Math., XXIV, Providence, R.I.: American Mathematical Society(1973)181-193

[15] "Zeros of approximations to the zeta function",Montgomery, Hugh L., in Erdös, Paul, Studies in pure mathematics. To the memory of Paul Turán, Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser(1983)497-506

[16] "Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis", Sarnak, Peter, in Borwein, Peter; Choi, Stephen; Rooney, Brendan et al. (PDF)(2008)

[17] The theory of the Riemann Zeta function, Titchmarsh. E,. C., Clarendon Press Oxford (1996)