リーマン予想の肯定的解決

T.Nakashima

概 要

この論文ではメビウス関数に関するリーマン予想と同値な命題を証明する。

1

リーマン予想と同値な命題を扱う。リーマン予想を $R.H$ とあらわす。$\mu(n)$ はメビウス関数のことである。

次の定理はよく知られている。

定理

$$\sum_{n=1}^{m}\mu(n)=O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})\Leftrightarrow R.H$$

本論文ではこの左側の等式を証明する。

補題 1.1

$$\sum_{n|m}\mu(n)=1(m=1),\sum_{n|m}\mu(n)=0(m\neq 1)$$

Proof. $m=1$ の場合、$\sum_{n|m}\mu(n)=\mu(1)=1$。2 番目の場合。これには少し説明が要る。$m$ の素因数分解を $m=p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}\cdots p_k^{n_k}$. とすると、$\sum_{n|m}\mu(n)=_k C_0-_k C_1+_k C_2-_k C_3+\cdots_k C_k=(1-1)^k=0$ が得られる。 □

[] はガウス記号を表すものとする。

定理 1

$$\sum_{n\leq m}\mu(n)[\frac{m}{n}]=1$$

Proof. 補題 1.1 より $\sum_{m'=1}^{m}\sum_{n|m'}\mu(n)=1$ である。

$$1=\sum_{m'=1}^{m}\sum_{n|m'}\mu(n)=(\mu(1))+(\mu(1)+\mu(2))+(\mu(1)+\mu(3))$$

$$+(\mu(1)+\mu(2)+\mu(4))+\cdots$$

$\mu(n)$ をこの式の中で文字として見る。$\mu(1)$ は m 回この式の中に現れる。$\mu(2)$ は m 以下の 2 の倍数 $[\frac{m}{2}]$ 回この式の中に現れる。一般に $\mu(n)(n<m)$ は m 以下の n の倍数 $[\frac{m}{n}]$ 回この式の中に現れる。$\sum_{n\leq m}\mu(n)[\frac{m}{n}]=1$ を得る。 □

例
$m=10$ の場合、$10-5-3-2+1-1+1=1$。$m=13$ の場合、$13-6-4-2+2-1+1-1-1=1$。などなど。

定理 2

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{m}{n}\mu(n)\ changes\ sign\ at\ n_0\in[m^{\frac{1}{2}(1-\epsilon')},m^{\frac{1}{2}}](m>\exists m_{\epsilon'})$$

Proof. $\sum_{n=1}^{x}\frac{m}{n}\times\mu(n)$ は $n_0\in[m^{\frac{1}{2}(1-\epsilon)},m^{\frac{1}{2}}],m>\exists m_\epsilon$ で符号を変える ([1])。 □

補題 3.1

$$-1\leq|f(n)|\leq 1(n=1,\cdots,m)\Rightarrow|\sum_{n\leq m}f(n)|\leq m$$

Proof. 正の $f(n)(n\leq m)$ の合計を取る。(F_1 と書く。) 負のの $f(n)(n\leq m)$ の合計を取る。(F_2 と書く。)
$|F_1|,|F_2|\leq m,|F_1+F_2|\leq m$ が得られる。言い換えると絶対値が 1 以下のものを m 個足し合わせたものは m 以下である。 □

定理 3

$$|\sum_{n<m}\mu(n)|<Km^{\frac{1}{2}+\epsilon}$$

Proof. 定理 1 から

$$\sum_{n\leq\sqrt{m}}\mu(n)[\frac{m}{n}]+\sum_{\sqrt{m}<n\leq m}\mu(n)[\frac{m}{n}]=1$$

($n_0 < \sqrt{m}$ は $\sum_{n<x} \frac{m}{n}\mu(n)$ が符号を変えるポイントとする。) 補題 3.1 より、$\sum_{n\leq\sqrt{m}} \mu(n)[\frac{m}{n}]$ と $\sum_{n\leq\sqrt{m}} \mu(n)\frac{m}{n}$。その大きさの違いは $[\sqrt{m}]$ 以下である。以下が $\sum_{n_0<n\leq m} \mu(n)[\frac{m}{n}]$ に関する計算により従う。$[\sqrt{m}]$ に対応する項は $[\frac{m}{n}] = [\sqrt{m}]-1$ を満たす項すべてである。$m/\sqrt{m} = \sqrt{m} \geq [\sqrt{m}]$、$m/(m/(\sqrt{m}-1)) = \sqrt{m}-1 \geq [\sqrt{m}-1]$ $(m/(m/(\sqrt{m}-1)+1) = m(\sqrt{m}-1)/(m+\sqrt{m}-1) < \sqrt{m}-1)$ について注意すれば足し合わせる範囲は $\sqrt{m}$ から $m/(\sqrt{m}-1)$ である。次の項は $[\frac{m}{n}] = [\sqrt{m}]-2$、$m/(m/(\sqrt{m}-2)) \geq [\sqrt{m}-2]$ より足し合わせる範囲は $m/(\sqrt{m}-1)$ から $m/(\sqrt{m}-2)$ である。最終項は $[\frac{m}{n}] = 1$ より、$\frac{m}{2}$ から m までである。

$$\sum_{n_0<n\leq m} \mu(n)[\frac{m}{n}] = ([m/(n_0)]-1)\times \sum_{m/([m/(n_0)])<n\leq m/([m/(n_0)]-1)} \mu(n)+\cdots+$$

$$([\sqrt{m}])\times \sum_{m/(\sqrt{m}+1)<n\leq m/\sqrt{m}} \mu(n) + ([\sqrt{m}]-1)\times \sum_{\sqrt{m}<n\leq m/(\sqrt{m}-1)} \mu(n)$$

$$+([\sqrt{m}]-2)\times \sum_{\sqrt{m}/(\sqrt{m}-1)<n\leq m/(\sqrt{m}-2)} \mu(n)+\cdots+1\times \sum_{m/2<n\leq m} \mu(n)$$

帰納法により、以下のような「ほぼ正しい」等式群を得る。$|N\times\sum_{m/(N+1)<n\leq m/N}\mu(n)| < \frac{N}{N+1}K(\frac{m}{N})^{\frac{1}{2}(1+\epsilon')}, |1\times\sum_{m/2<n\leq m}\mu(n)| < \frac{1}{2}(K(m-1)^{\frac{1}{2}(1+\epsilon')}+1)$

$$([\sqrt{m}]-1)\times \sum_{\sqrt{m}<n\leq m/(\sqrt{m}-1)} \mu(n)$$

から始める。(もちろんこれは 0 かもしれない。)
$|\sum_{\sqrt{m}<n\leq m/(\sqrt{m}-1)}\mu(n)|$ は $\frac{1}{[\sqrt{m}]-1}K(\frac{m}{[\sqrt{m}]-1})^{\frac{1}{2}(1+\epsilon')}$ よりもおおよそ少ない。
ここからは実例で計算する。
例：$m = 100$ の場合

$$-6 = 10-9+0+0+6-5\times 2-4-3+2+1\times 4$$

$1\times 4-4+2-3$ より $4-1+1-1 = 3$ が大体 $\sum_{[100/n_0]<n\leq 100}\mu(n)$ を決めてしまう。実際 $\sum_{9<n\leq 100}\mu(n) = 2$ である。これは $|\sum_{[100/n_0]<n\leq 100}\mu(n)| < K[100/n_0] = K\times 10$ を示す。
例：$m = 10000$ の場合

$$-95 = 107+106+105+0-103+0+0+0-99-98-97+0-95+94-93+0-91$$

$+0+0-88-87+86+0+0+84\times2+0+0+81\times2+0+0-78+77-76\times2+75$
$+74+0-72\times2-71+70\times2+69+68\times2-67-66+0+0+0+62\times2-61+0-59$
$-58-57\times2+56\times2-55\times2+54+0-52\times2-51-50\times2+49\times3+48\times2+47+46$
$\times4+45\times2-44-43\times3+0-41\times2+40+0-38+0-36\times2-35\times3-34+33\times6$
$-32-31+30\times4+29\times3-28\times4-27+0+25\times3+0-23\times6+22-21\times2+0+19$
$\times4+18\times7+17-16\times9-15\times9+14\times9+0+0+11\times2+10\times3-9\times15+8\times10+7$

$$\times12-6\times20+5\times16-4\times6+3\times18-2\times15-1\times25$$

$-1\times25+3\times8-2\times15+3\times10$ より $-25+8-15+10=-22$ だから $\sum_{94<n\leq10000}\mu(n)=-22$ 付近を取るこれは $|\sum_{[100/n_0]<n\leq100}\mu(n)|<K[100/n_0]=K\times107$ を示す。4 項以上を計算に使用してもよく「ほぼ等しい」式の範囲を取り換えて 3 項以下にして計算すればよい。なぜ大体数値が一致するのかそれは $\sum_{n_0\geq n\geq n_1}\mu(n)=0$ ならば定理 2 より $\sum_{n_0\geq n\geq n_1}[\frac{m}{n}]\mu(n)=0, n_1<<m$ であるからである。

$$\frac{1}{4}K(\frac{m}{3})^{\frac{1}{2}(1+\epsilon')}\frac{A\times2+B\times1}{A+B}<Km^{\frac{1}{2}(1+\epsilon')}-Km^{\frac{1}{4}+\epsilon}$$

$$\frac{1}{2}K((m-1)^{\frac{1}{2}(1+\epsilon')}+1)\frac{A(1-\frac{1}{2})+B(1-\frac{1}{3})}{A+B}<Km^{\frac{1}{2}(1+\epsilon')}-Km^{\frac{1}{4}+\epsilon}$$

であることなどが計算により確かめられる。

$$|\sum_{n\leq m}\mu(n)|<Km^{\frac{1}{4}+\epsilon}+K[m^{\frac{1}{2}(1+\epsilon')}]-Km^{\frac{1}{4}+\epsilon}$$

$$|\sum_{n\leq m}\mu(n)|<Km^{\frac{1}{2}+\epsilon}$$

R.H. を得る。 □

Special Thanks
私の友人である H.Tokitu 君に英語の翻訳で大変お世話になりました。この場を借りて感謝を述べたいと思います。

参考文献

[1] Oscillatory properties of arithmetical functions. I Kaczorowski and Pintz (Acta Math. Hungar. 48 (1986))