リーマン予想の肯定的解決

T.Nakashima

概 要

この論文ではメビウス関数に関するリーマン予想よりも少し強い命題を証明する。

1

リーマン予想と同値な命題を扱う。リーマン予想を $R.H$ とあらわす。$\mu(n)$ はメビウス関数のことである。

次の定理はよく知られている。**定理**

$$\sum_{n=1}^{m}\mu(n)=O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})\Leftrightarrow R.H$$

I 次の定理を証明する。この定理を以後 S.R.H.(Strong Riemann Hypothesis) と呼ぶ。
主定理 (S.R.H.)

$$\sum_{n=1}^{m}\mu(n)=O(\sqrt{m}\log m)$$

$$S.R.H.\Leftrightarrow|\sum_{n=1}^{m}\mu(n)|\leq K\sqrt{m}\log m(m\geq m_0)(\exists K,\exists m_0>0)$$

本論文では $K=1$ の場合を証明する。もしこの定理が成り立てば

$$\sum_{n=1}^{m}\mu(n)=O(\sqrt{m}\log m)\Rightarrow\sum_{n=1}^{m}\mu(n)=O(m^{\frac{1}{2}+\epsilon})\Rightarrow R.H$$

が得られる。

補題 1.1

$$\sum_{n|m}\mu(n)=1(m=1),\sum_{n|m}\mu(n)=0(m\neq 1)$$

Proof. $m=1$ の場合、$\sum_{n|m}\mu(n)=\mu(1)=1$。2 番目の場合。これには少し説明が要る。$m$ の素因数分解を $m=p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}\cdots p_k^{n_k}$. とすると、$\sum_{n|m}\mu(n)=_k C_0 -_k C_1 +_k C_2 -_k C_3+\cdots_k C_k=(1-1)^k=0$ が得られる。 □

[] はガウス記号を表すものとする。

定理 1

$$\sum_{n\leq m}\mu(n)[\frac{m}{n}]=1$$

Proof. 補題 1.1 より $\sum_{m'=1}^{m}\sum_{n|m'}\mu(n)=1$ である。

$$1=\sum_{m'=1}^{m}\sum_{n|m'}\mu(n)=(\mu(1))+(\mu(1)+\mu(2))+(\mu(1)+\mu(3))$$

$$+(\mu(1)+\mu(2)+\mu(4))+\cdots$$

$\mu(n)$ をこの式の中で文字として見る。$\mu(1)$ は m 回この式の中に現れる。$\mu(2)$ は m 以下の 2 の倍数 $[\frac{m}{2}]$ 回この式の中に現れる。一般に $\mu(n)(n<m)$ は m 以下の n の倍数 $[\frac{m}{n}]$ 回この式の中に現れる。$\sum_{n\leq m}\mu(n)[\frac{m}{n}]=1$ を得る。 □

定理 2

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{m}{n}\times\mu(n)\leq m^{\frac{1}{2}(1+\epsilon)}(n_1\leq\sqrt{m},n_1\text{は最大})$$

Proof. $\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n}\times\mu(n)$ は $[m^{\frac{1}{2}(1-\epsilon)},m^{\frac{1}{2}}],m>\exists m_\epsilon$ で符号を変える ([1])。この条件で $n_1<\sqrt{m}$ が存在しそれは最大で $|\sum_{n<n_1}\frac{m}{n}\mu(n)|<m^{\frac{1}{2}(1+\epsilon)}$ を満たす。 □

補題 3.1

$$-1\leq|f(n)|\leq 1(n=1,\cdots,m)\Rightarrow|\sum_{n\leq m}f(n)|\leq m$$

Proof. 正の $f(n)(n \le m)$ の合計を取る。(F_1 と書く。) 負ののの $f(n)(n \le m)$ の合計を取る。(F_2 と書く。)
$|F_1|, |F_2| \le m, |F_1 + F_2| \le m$ が得られる。 □

補題 3.2

$$\log \sqrt{m} + 1 > \frac{1}{[\sqrt{m}]} + \cdots + 1$$

Proof. $\log \sqrt{m} > \int_1^{[\sqrt{m}]} \frac{1}{x} dx > \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{[\sqrt{m}]}$ □

定理 3

$$\sum_{n<m} \mu(n) = O(\sqrt{m} \log(m))$$

この証明はステップを踏んで証明する。

Proof. ステップ 1)
定理 1 から

$$\sum_{n \le \sqrt{m}} \mu(n)[\frac{m}{n}] + \sum_{\sqrt{m}<n \le m} \mu(n)[\frac{m}{n}] = 1$$

補題 3.1 より、 $\sum_{n \le \sqrt{m}} \mu(n)[\frac{m}{n}]$ と $\sum_{n \le \sqrt{m}} \mu(n)\frac{m}{n}$。その大きさの違いは $[\sqrt{m}]$ 以下である。定理 2 より $\sum_{n=1}^{n_1} \frac{m}{n} \times \mu(n)| \le m^{\frac{1}{2}(1+\epsilon)}$。上の式より以下の 2 式が従う。

$$|\sum_{n \le n_1} \mu(n)[\frac{m}{n}]| < m^{\frac{1}{2}(1+\epsilon)} + \sqrt{m} \tag{1}$$

$$|\sum_{\sqrt{m}<n \le m} \mu(n)[\frac{m}{n}]| < m^{\frac{1}{2}(1+\epsilon)} + \sqrt{m} + 1 \tag{2}$$

(2) について計算により次を得る。$\sqrt{m}$ に対応する項は $\left[\frac{m}{n}\right] = [\sqrt{m}] - 1$ より $m/\sqrt{m} = \sqrt{m} \ge [\sqrt{m}]$、$m/(m/(\sqrt{m}-1)) = \sqrt{m} - 1 \ge [\sqrt{m} - 1]$。$(m/(m/(\sqrt{m}-1)+1) = m(\sqrt{m}-1)/(m+\sqrt{m}-1) < \sqrt{m}-1)$ よりその足し合わせる範囲は $\sqrt{m}$ から $m/(\sqrt{m}-1)$ である。その次の項は $\left[\frac{m}{n}\right] = [\sqrt{m}] - 2$、$m/(m/(\sqrt{m}-2)) \ge [\sqrt{m}-2]$ よりその足し合わせる範囲は $m/(\sqrt{m}-1)$ から $m/(\sqrt{m}-2)$ である。最後の項は $\left[\frac{m}{n}\right] = 1$ であるがこれを満たすのは $\frac{m}{2}$ から m までである。

$$\sum_{n_1<n \le m} \mu(n)[\frac{m}{n}] = ([m/(n_1)] - 1) \times \sum_{m/(n_1)<n \le m/(n_1-1)} \mu(n) + \cdots +$$

$$([\sqrt{m}]-1)\times\sum_{\sqrt{m}<n\le m/(\sqrt{m}-1)}\mu(n)+([\sqrt{m}]-2)\times$$

$$\sum_{\sqrt{m}/(\sqrt{m}-1)<n\le m/(\sqrt{m}-2)}\mu(n)+\cdots+1\times\sum_{m/2<n\le m}\mu(n)$$

ステップ 2)
正の項と負の項を左辺に移項して左辺を変形する。このとき $[\sqrt{m}]-1,[\sqrt{m}]-2\cdots,1$ はいじらないように、そして $+1$ と -1 を同じ回数使うように注意する。さらに左辺は $m^{\frac{1}{2}(1+\epsilon)}+\sqrt{m}+1$ より少ない絶対値を取るようにしておく。左辺の値はあまり重要でない。最終的に右辺のすべての項の絶対値は K 掛ける $\sqrt{m}$ よりも少なくできる。最悪の場合、左辺が正の数で $m^{\frac{1}{2}(1+\epsilon)}+\sqrt{m}+1$ の近くの値を取り、右辺の最初のほうは負の数で $-\sqrt{m}$ よりも少なく、残りの項はすべて正の数で $\sqrt{m}$ よりも大きい場合、この作業はストップする。しかしながらこのようなことは起こらない。なぜなら左辺が最初から $m^{\frac{1}{2}(1+\epsilon)}+\sqrt{m}+1$ よりも大きかった場合しかありえないからである。右辺の総合計が左辺であることに注意する。左辺が負の数ときも同様である。これらの場合は起こらない。左辺が正の数で右辺に $\sqrt{m}$ よりも大きな項があった場合、より後ろの負の数の項と同時に変形するとよい。左辺が負の数の時はより前の負の数の項と同時に変形するとよい。（最後の項が $\sqrt{m}$ よりも大きくて左辺が正の数の時変形可能ではあるが、余り容易ではない。）（右辺が限界に近づくときおおよそ少なくとも $\frac{\sqrt{m}}{2}\times\frac{\sqrt{m}}{2}=\frac{m}{4}$ 以上変形に必要である。最初の項から $[\frac{\sqrt{m}}{2}]$ までだと $\sqrt{m}$ から $[2\sqrt{m}]$ での偏りは $m^{\frac{1}{4}}\log m^{\frac{1}{2}}+(2m)^{\frac{1}{4}}\log(2m)^{\frac{1}{2}}$ 程度であり $m^{\frac{1}{2}(1+\epsilon)}+\sqrt{m}+1$ はこの限界への近づきをゆるさない。）
$|\sum_{n\le\sqrt{m}}\mu(n)|<\sqrt{m}$ を最後に計算に入れる。
最終ステップ)
変形後、

$$\textit{the left side }=([m/(n_1)]-1)\times\sum\mu(n)+\cdots+([\sqrt{m}]-1)\times\sum\mu(n)$$

$$+([\sqrt{m}]-2)\times\sum\mu(n)+\cdots+1\times\sum\mu(n)$$

右辺のすべての項は絶対値が $\sqrt{m}$ より少ない。

$$([\sqrt{m}]-1)\times\sum\mu(n)$$

から始める。(もちろんこれは 0 かもしれない。) $\sum\mu(n)$ is less than

$\frac{1}{[\sqrt{m}]-1}\sqrt{m}$. 補題 3.2 より

$$|\sum_{\sqrt{m}<n\le m}\mu(n)| = (\sqrt{m})(\frac{1}{[m/(n_1)]}+\cdots+\frac{1}{[\sqrt{m}]}+\frac{1}{[\sqrt{m}]-1}+\cdots+1)$$

$$< \sqrt{m}(\log[m/(n_1)]+1)$$

$$|\sum_{n\le m}\mu(n)| = |\sum_{n\le n_1}\mu(n)+\sum_{n_1<n\le m}\mu(n)| \le \sqrt{m}(\log[m/(n_1)]+2)$$

$$= O(\sqrt{m}\log m)$$

□

Special Thanks
私の友人である H.Tokitu 君に英語の翻訳で大変お世話になりました。この場を借りて感謝を述べたいと思います。

参考文献

[1] Oscillatory properties of arithmetical functions. I Kaczorowski and Pintz (Acta Math. Hungar. 48 (1986))