

# コラッツ予想 ～その半分の証明～

T.Nakashima  
E-mail address  
tainakashima@mbr.nifty.com

April 16, 2017

## Abstract

コラッツ予想の半分、コラッツ数列がサイクルをもたないことを証明する。既に知られている結果としては68-サイクル以下の場合が存在しないことが知られている。残念ながらコラッツ数列が無限大に行く可能性を否定することはできなかった。

## 1

この手稿ではコラッツ予想の一部を証明する。この問題は1937年にLothar Collatzによって生み出された。80年の間に証明された最も最良の結果は68-サイクルが存在しないことである。ここでは一般のm-サイクルが存在しないことを示す。

### コラッツ予想

$$\begin{cases} n \text{ が偶数} & \Rightarrow 2 \text{ でわる} \\ n \text{ が奇数} & \Rightarrow 3 \text{ 倍して } 1 \text{ を足す} \end{cases}$$

この操作を繰り返すといずれは1へ行く。

次の結果が知られている。

定理 1.1(68-サイクル)

自明な場合を除き、ある数が68回以下減少し奇数を取り、その後68回以下増加して偶数を取って同じ数になることはない。

例：

$$43 \rightarrow 130 \rightarrow 65 \rightarrow 196 \rightarrow 49 \rightarrow 148 \rightarrow 37 \rightarrow 112 \rightarrow 7 \rightarrow 22 \rightarrow$$

$$11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 13 \rightarrow$$

この列は8以上のサイクルの一部になる可能性がある。

**定理 1.2**(コラッツ予想の半分の証明)

自明な場合を除き、コラッツ数列のある数は同じ数に行くことはない。

**系 1.1**

コラッツ数列は次第に増加し無限大に行く可能性か、次第に減少し1に行くことしかない。

**proof.** 定理の証明をする。次の式を仮定する。

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^m N + \alpha = M$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n_1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2} \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n_3} \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n_{m-1}} \left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}$$

$$n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots \leq n_{m-1}$$

$M$  は  $N$  から  $m - 1$  回奇数を取った時の値である。

例：

$N = 43, N = 13$  の場合。

$$M(= 13) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{3}{2}\right)^7 N(= 43) + \alpha$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{3}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$\alpha$  の式の中で  $\frac{1}{2}$  は  $\frac{3N+1}{2}$  を行った時に現れる。その後  $\frac{3}{2}$  と  $\frac{1}{2}$  を計算に従って掛けたものである。この計算は容易に計算機で検算できる。

$M = N$  を仮定して矛盾を導く。計算がややこしいので簡単のため、 $M = 13, N = 43$  の場合を計算する。無論  $43 \neq 13$  ではある。

$$N = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{3}{2}\right)^7 N + \alpha$$

$2^{13}$  を掛ける。

$$2^{13}N = 3^7N + 2^{11} + 2^{10}3 + 2^93^2 + 2^53^3 + 2^33^4 + 23^5 + 3^6$$

$\alpha$  の値を計算してみよう。だいたい  $\alpha = 1.520386 \dots$  である。

$N = M$  であったので

$$N\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n 3^m\right) = \alpha$$

$$N(2^n - 3^m) = 2^{n-l} + 2^{n-l}3 + \dots + 3^{m-1}$$

$m \geq 2$  とする。なぜなら唯一の例外は  $N = 1, n = 2, m = 1, l = 2$  の場合のみであるからである。具体的に見よう。

$$2^{13}N - 3^7N = 2^{11} + 2^{10}3 + 2^93^2 + 2^53^3 + 2^33^4 + 23^5 + 3^6$$

の場合。  $2^{14} = 16384$  をとり  $16384 + N = 16384 + 43 = 16427$  をとるとこの  $16427$  は挙動が  $43$  と全く同じである。それもそのはずでこの 2 つの  $\alpha$  は全く同じである。(最後の 13 までです。)  $43$  がループするならば  $16427$  もループする。

$$2^{11} + 2^{10}3 + 2^93^2 + 2^53^3 + 2^33^4 + 23^5 + 3^6$$

は  $43$  の倍数である。同時に  $16427$  などの無限に存在するループする (としている) 元で割り切れる。これはありえない。この場合、いや一般の自然数についてない。 $m$ -サイクルは存在できない。証明終了。  $\square$

最後に  $1$ -サイクルを計算しておこう。

$$N = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{3}{2} N + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$2^{n+1}$  倍して

$$2^{n+1}N = 3N + 1 \Rightarrow ((2^{n+1}) - 3)N = 1$$

$$(2^{n+1} - 3)N = 1, n = 1, N = 1$$

$1$  から出発すると  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow$  となり確かに存在する。検算しておこう。

$$1 = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{3}{2} \times 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$