コラッツ予想
～その半分の証明～

T.Nakashima
E-mail address
tainakashima@mbr.nifty.com

July 21, 2017

Abstract

コラッツ予想の半分、コラッツ数列がサイクルをもたないことを証明する。既に知られている結果としては68-サイクル以下の場合が存在しないことが知られている。残念ながらコラッツ数列が無限大に行く可能性を否定することはできなかった。

1

この手稿ではコラッツ予想の一部を証明する。この問題は１９３７年にLothar Collatz によって生み出された。８０年の間に証明された最も最良の結果は68-サイクルが存在しないことである。ここでは一般の m-サイクルが存在しないことを示す。

コラッツ予想

$$\begin{cases} n\text{が偶数} & \Rightarrow \ 2\text{でわる} \\ n\text{が奇数} & \Rightarrow \ 3\text{倍して}1\text{を足す} \end{cases}$$

この操作を繰り返すといずれは 1 へ行く。

次の結果が知られている。

定理 1.1(68-サイクル)

自明な場合を除き、ある数が 68 回以下減少し奇数を取り、その後 68 回以下増加して偶数を取って同じ数になることはない。
例：

$$43 \to 130 \to 65 \to 196 \to 49 \to 148 \to 37 \to 112 \to 7 \to 22 \to$$

$$11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 13 \to$$

この列は 8 以上のサイクルの一部になる可能性がある。

定理 1.2(コラッツ予想の半分の証明)
自明な場合を除き、コラッツ数列のある数は同じ数に行くことはない。

系 1.1
コラッツ数列は次第に増加し無限大に行く可能性か、次第に減少し 1 に行くことしかない。

proof. 定理の証明をする。次の式を仮定する。

$$(\frac{1}{2})^n(\frac{3}{2})^m N + \alpha = M$$

$$\alpha = (\frac{1}{2})^{n_1} + (\frac{1}{2})^{n_2}(\frac{3}{2}) + (\frac{1}{2})^{n_3}(\frac{3}{2})^2 + \cdots + (\frac{1}{2})^{n_{m-1}}(\frac{3}{2})^{m-1}$$

$$n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots \leq n_{m-1}$$

M は N から $m-1$ 回奇数を取った時の値である。

例：
$N = 43, M = 13$ の場合。

$$M(=13) = (\frac{1}{2})^6(\frac{3}{2})^7 N(=43) + \alpha$$

$$\alpha = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2(\frac{3}{2}) + (\frac{1}{2})^2(\frac{3}{2})^2 + (\frac{1}{2})^5(\frac{3}{2})^3 + (\frac{1}{2})^6(\frac{3}{2})^4$$
$$+(\frac{1}{2})^7(\frac{3}{2})^5 + (\frac{1}{2})^7(\frac{3}{2})^6$$

α の式の中で $\frac{1}{2}$ は $\frac{3N+1}{2}$ を行った時に現れる。その後 $\frac{3}{2}$ と $\frac{1}{2}$ を計算に従って掛けたものである。この計算は容易に計算機で検算できる。

$M = N$ を仮定して矛盾を導く。計算がややこしいので簡単のため、$M = 13, N = 43$ の場合を計算する。無論 $43 \neq 13$ ではある。

$$N = (\frac{1}{2})^6(\frac{3}{2})^7 N + \alpha$$

2^{13} を掛ける。

$$2^{13}N = 3^7N + 2^{11} + 2^{10}3 + 2^9 3^2 + 2^5 3^3 + 2^3 3^4 + 23^5 + 3^6$$

α の値を計算してみよう。だいたい $\alpha = 1.520386\cdots$ である。

$N = M$ であったので

$$N(1 - (\frac{1}{2})^n 3^m) = \alpha$$

$$N(2^n - 3^m) = 2^{n-l} + 2^{n-l'}3 + \cdots + 3^{m-1}$$

$m \geq 2$ とする。なぜなら唯一の例外は $N = 1, n = 2, m = 1, l = 2$ の場合のみであるからである。具体的に見よう。

$$2^{13}N - 3^7N = 2^{11} + 2^{10}3 + 2^9 3^2 + 2^5 3^3 + 2^3 3^4 + 23^5 + 3^6$$

の場合。$2^{13} \approx 3^7$ としてよい。$N \approx 2^{13}\alpha/(2^{13} - 3^7) \approx 3^7\alpha/(2^{13} - 3^7)$。$2^{13}\alpha/(2^{13} - 3^7)$ は整数であることに注意。

$$2^{13}N - 3^7N \approx (2^{13}3^7 - 3^7 2^{13})\alpha/(2^{13} - 3^7) = 0$$

右辺は誤差が 2^{13} の何倍か -3^7 の何倍かである。

$$0 \approx 2^{11} + 2^{10}3 + 2^9 3^2 + 2^5 3^3 + 2^3 3^4 + 23^5 + 3^6$$

は誤差項を入れても矛盾する。$m-$ サイクルは存在できない。証明終了。 □

最後に $1-$ サイクルを計算しておこう。

$$N = (\frac{1}{2})^n \frac{3}{2} N + (\frac{1}{2})^{n+1}$$

2^{n+1} 倍して

$$2^{n+1}N = 3N + 1 \Rightarrow ((2^{n+1}) - 3)N = 1$$

$$(2^{n+1} - 3)N = 1, n = 1, N = 1$$

1 から出発すると $1 \to 4 \to 1 \to 4 \to$ となり確かに存在する。検算しておこう。

$$1 = (\frac{1}{2})\frac{3}{2} \times 1 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$