リーマン予想を仮定したルジャンドル予想の肯定的解決

T.Nakashima
E-mail address
tainakashima@mbr.nifty.com

April 4, 2017

Abstract

m 付近で素数の間隔が $\log m$ 以下のオーダーであることを示す。これがルジャンドル予想を解くカギである。ただしまだこの議論は粗い。

1

Theorem 1.1. ルジャンドル予想
n^2 と $(n+1)^2$ の間には素数が必ず一つはある。

Definition 1.1.

$$Li(x) := \int_2^\infty \frac{1}{log(x)} dx$$

次の結果はリーマン予想そのものである。これを正しいと仮定する。

Theorem 1.2. m 以下の素数の個数 $\pi(m)$ は

$$\pi(m) = Li(m) + O(\sqrt{m}\log m)$$

である。

さらに

Theorem 1.3. *Littlewood*
m 以下の素数の個数 $\pi(m)$ は

$$\pi(m) - Li(m) = \Omega_+(\sqrt{m}\frac{\log\log\log m}{\log m})$$

を満たす。

ここで $f(m) = \Omega_+(g(m))$ は十分大きな m に対し $f(m) > cg(m)$ が成り立つ c が存在することを示している。

Theorem 1.4. m 付近で素数の間隔は $\log m$ のオーダーである。

proof.

$$\frac{m}{m/\log m} = \log m$$

よりおおざっぱに言うと素数の間隔は $\log m$ のオーダーである。 □

ここで $Li(m) = \frac{m}{logm} + \frac{1!m}{\log m^2} + \cdots \frac{(n-1)!m}{\log m^n} + O(\frac{x}{\log x^{n+1}})$ と漸近展開した時の主要部 $\frac{m}{logm}$ を取っている。実際大きさから言って $Li(m)$ のほとんどは $\frac{m}{logm}$ である。
K という値を考える。これは十分大きな m に対し（素数の間隔）$< K\log m$ が成り立つ m に依存しない定数である。さて $(n+1)^2 - n^2 >> K\log n^2$ で考えると十分大きな n に対しルジャンドル予想は正しい。
双子素数との関係は一見 $\log m$ のオーダーよりも大きな素数の間隔を取るように見えるが、一つでも例えば2倍程度の間隔を取ると間隔2（つまり双子素数）は容易にとれる。大きいほうにはオーダーが付かないのである。

2

同様に次の定理も成り立つ。

Theorem 2.1. *Andrica's conjecture*

$$\sqrt{p_{i+1}} - \sqrt{p_i} < 1$$

proof. $(\sqrt{p_{i+1}} - \sqrt{p_i})(\sqrt{p_{i+1}} + \sqrt{p_i}) = p_{i+1} - p_i$ 右辺は $K\log p_i$ ぐらいの数。（K は p_i とは無関係。）つまり $\sqrt{p_{i+1}} - \sqrt{p_i} < 1$ □

3

同様に次の定理も成り立つ。

Theorem 3.1. *Bertrand's postulate*
$n > 3 \Rightarrow n$ と $2n-2$ の間には素数が必ず一つはある。

proof. （素数の間隔）$< K\log n$ が成り立つ。K は n に依存しない定数である。さて $2n-2-n >> K\log n$ で考えると十分大きな n に対しベルトランの公準は正しい。

□