ルジャンドル予想の肯定的解決

T.Nakashima
E-mail address
tainakashima@mbr.nifty.com

September 9, 2019

Abstract

ある予想を仮定すると m 付近で素数の間隔が $\log m$ 以下のオーダーであることを示す。これはそのままルジャンドル予想の答となる。

。

1

Theorem 1.1. ルジャンドル予想
n^2 と $(n+1)^2$ の間には素数が必ず一つはある。

Conjecture 1.1.

$$\Delta(\Sigma\mu(n)[\frac{m}{n}]) = \Delta(\Sigma\mu(n)(\frac{m}{n})) + O(1)$$

Σ は m のルート $\sqrt{m}$ 以下の素因数の積に n がなる場合すべての和であり Δ は微小な増加量を表している。

この予想は物理と数学のかきしっぽ ver2.1 の中で予想した物の類似である。

Lemma 1.1.

$$\Sigma\mu(n)(\frac{m}{n}) = \Pi_{p_i<\sqrt{m}}(1-\frac{1}{p_i})m$$

proof. 明らか。 □

Theorem 1.2. m 付近で素数の間隔は $\Pi_{p_i<\sqrt{m}}(1-\frac{1}{p_i})^{-1}$ のオーダーである。

proof. $\Sigma\mu(n)[\frac{m}{n}]$ は $\sqrt{m}$ 以上 m 以下の素数の個数である。そして $Conjecture$ によると、素数の偏りによりこの間隔は少し変わることもあるがだいたい $\Pi_{p_i<\sqrt{m}}(1-\frac{1}{p_i})^{-1}$ 以下のオーダーの間隔で増える。 □

$\Pi_{p_i<\sqrt{m}}(1-\frac{1}{p_i})^{-1}$ は $\log m^{\frac{1}{2}}$ 程度の数である。したがってルジャンドル予想は解決した。

2

同様に次の定理も成り立つ。

Theorem 2.1. $\sqrt{p_{i+1}}-\sqrt{p_i}<1$

proof. $(\sqrt{p_{i+1}}-\sqrt{p_i})(\sqrt{p_{i+1}}+\sqrt{p_i})=p_{i+1}-p_i$ 右辺は $\log p_i$ ぐらいの数。つまり $\sqrt{p_{i+1}}-\sqrt{p_i}<1$ □