循環小数と原子根の関係

T.Nakashima
E-mail address
tainakashima@mbr.nifty.com

July 22, 2016

1

$$\frac{1}{7} = 0.14285714857\cdots$$

から始めよう。$10 = 3 + 7$ を 7 で割ると 1 余り 3 となる。３０を 7 で割ると４余り 2 となる。２０を 7 で割ると 2 余り 6 となる。これは $3 \to 2 \to 6$ ときれいに対応する。つまり $\frac{1}{7}$ の巡回が $7 - 1 = 6$ なのは 3 が 7 の原子根であることと等価である。

$$\frac{1}{17} = 0.0588235294117647\cdots$$

これについて p を 5 以上の素数とする。10 が p の原子根であることと循環の長さが $p - 1$ であることは等価である。

という予想を証明しながら見てみる。$p = 17$ とする。10 はこの場合原子根である。さっき 3 と 7 でやったことを応用する。今の場合 -7 と 17 の場合といっていい。まず最初に 10 と 17 から $10 - 17 = -7$ と求める。通常のような場合ここで小数点が 1 進む。$100/17 = 5$ 余り $15 \equiv (-7)^2 = 49(mod\ 17)$。$150/17 = 8$ 余り $14 \equiv (-7)^3 = -343(mod\ 17)$ である。この後も最終的に $p - 1 = 16$ 回目で循環する。

$17 + 7 = 24$ でやってみる。これを２４進法で割り算する。２４割る１７は１余り７．$7 \times 24 = 168$。１６８割る１７は 9 余り１５

$$7 \to 15 \to 3 \to 4 \to 11 \to 9 \to 12 \to 16 \to 10 \to 2 \to 14 \to 13 \to 6$$

$\to 8 \to 5 \to 1 \cdots$

この列は計算もそうなっているが一般論で言うと１６項目で元にもどる。つまり２４進法での７の１７での割り算は７が１７の原子根であることから、１６項目でリピートを起こす。