一個の場合のシャヌエルの予想の肯定的証明

T.Nakashima
E-mail address
tainakashima@mbr.nifty.com

July 27, 2016

1

シャヌエルの予想
$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が有理数体上線形独立な複素数とする。

$$trans.deg_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \cdots, e^{\alpha_n}) \geq n$$

Remark:$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が代数的な場合はリンデマン=ワイエルシュトラスの定理として証明されている。

Theorem 1.1. リンデマン=ワイエルシュトラスの定理
$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ を線形独立な代数的複素数とする。

$$trans.deg_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \cdots, e^{\alpha_n}) = n$$

1 変数の場合のシャヌエルの定理の証明。

Theorem 1.2. α を複素数とする。

$$trans.deg_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\alpha, e^{\alpha}) \geq 1$$

proof. αを代数的数とする。この場合リンデマン=ワイエルシュトラスの定理を使うと e^{α} は $\mathbb{Q}$ で超越数である。α を超越数とする。どちらの場合も

$$trans.deg_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\alpha, e^{\alpha}) \geq 1$$

である。 □

残念ながらこの結果ではなにも新発見はない。