

ジャコブソン予想の反例

T.Nakashima

E-mail address

tainakashima@mbr.nifty.com

July 26, 2016

1

Definition 1.1. (ジャコブソン根基) 環 R においてその全ての元が任意の左 R 加群に左からかけると $\{0\}$ になるようなイデアルをジャコブソン根基という

以下では R は両側ネーター環と仮定する。

ジャコブソン予想

ジャコブソン根基を J とするとき $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J^n = \{0\}$ である。

Theorem 1.1. J が冪零でないならば、ジャコブソン予想は正しくない

proof. J のランクを N とする。まず J が異なる生成元 N 個持つとする。 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ としよう。 J^2 に含まれる元はジャコブソン根基の定義により J にすでに含まれる。これが 0 でない時を考える。 $J^2 \neq \{0\}$ より 0 でない元を考えてよい。なぜなら 0 でない元がないならば J は冪零になってしまう。 J^3 に含まれる元はやはり定義により J に含まれる。この元を j とする (0 でないとしてよい) と、 j は J に含まれる元と J に含まれる元の積の有限個の和であり、 J^2 に含まれる。 J が冪零でないならば、 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J^n \neq \{0\}$ を得る。ジャコブソン予想は成立しない \square