

ルジャンドル予想の肯定的解決

T.Nakashima

概要

この論文ではルジャンドル予想の強い形での解決を示す。内容としては素数の間隔の最小値を対数関数を用いて評価することになっている。

1

メビウス関数 $\mu(n)$ を次で定義する。

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{偶数個の素数の積} \\ -1 & \text{奇数個の素数の積} \\ 0 & \text{ある素数の2乗で割れる時} \end{cases}$$

p_i を i 番目の素数とする。 ($p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$) $[f(m)]$ でガウス記号を表す。

定理 1. $\{M^2 \text{ から } (M+1)^2 \text{ の間での最小の素数の間隔}\} < \log M^2$

Proof. $M^2 \leq m \leq (M+1)^2$ をとる。

$$\sum_{n: p_i \leq \sqrt{m}} \left[\frac{m}{n}\right] \mu(n)$$

\sqrt{m} 以下の素因子を持つ自然数について和を取ったものとする。すると

$$\left| \sum_{n: p_i \leq \sqrt{m}} \left[\frac{m}{n}\right] \mu(n) \right| = \#\{\sqrt{m} \text{以上 } m \text{ 以下の素数}\} + 1$$

が成立する。 m, m' を自然数 m とある数の平方数を挟まないような m の後の最初の素数とする。すると

$$\sum_{n: p_i \leq M} \left[\frac{m'}{n}\right] \mu(n) - \sum_{n: p_i \leq M} \left[\frac{m}{n}\right] \mu(n) = 1$$

を得る。このとき

$$\sum_{n:p_i \leq M} \frac{m'}{n} \mu(n)$$

と

$$\sum_{n:p_i \leq M} \frac{m}{n} \mu(n)$$

の差を K と置く。

$$\frac{1}{K} \left(\sum_{n:p_i \leq M} \frac{m'}{n} \mu(n) - \sum_{n:p_i \leq M} \frac{m}{n} \mu(n) \right) = 1$$

であり

$$\begin{aligned} & \frac{m' - m}{\frac{1}{K} \left(\sum_{n:p_i \leq M} \frac{m'}{n} \mu(n) - \sum_{n:p_i \leq M} \frac{m}{n} \mu(n) \right)} \\ &= \frac{m' - m}{\sum_{n:p_i \leq M} \left[\frac{m'}{n} \right] \mu(n) - \sum_{n:p_i \leq M} \left[\frac{m}{n} \right] \mu(n)} \end{aligned}$$

この式は

$$K \frac{1}{\sum_{n:p_i \leq M} \frac{1}{n} \mu(n)} = m' - m$$

と同値であり

$$\sum_{n:p_i \leq M} \frac{1}{n} \mu(n) = \prod_{p_i \leq M} \left(1 - \frac{1}{p_i} \right)$$

である。先の式は

$$K \prod_{p_i \leq M} \left(1 - \frac{1}{p_i} \right)^{-1} = m' - m$$

とも書ける。この左辺が $\prod_{p_i \leq M} \left(1 - \frac{1}{p_i} \right)^{-1}$ 増えるとき（平均的に）素数が一
つ増える。つまり $\prod_{p_i \leq M} \left(1 - \frac{1}{p_i} \right)^{-1}$ は平均的な素数の間隔を示している。
さらに素数定理を引用し

$$\frac{x}{\log x} \sim \pi(x)$$

であるがこれは

$$\frac{x}{\pi(x)} \sim \log x$$

と同値である。 $x' < x$ に対し $\log x' \doteq \log x$ とすると

$$\frac{x - x'}{\pi(x) - \pi(x')} \sim \frac{\pi(x) \log x - \pi(x') \log x'}{\pi(x) - \pi(x')} \doteq \log x$$

つまり x' から x までの間の平均の素数の間隔は $\log x$ で近似できる。一方

$$\frac{(M+1)^2 - M^2}{((M+1)^2 - M^2) \prod_{p_i \leq M} (1 - \frac{1}{p_i})} = \prod_{p_i \leq M} (1 - \frac{1}{p_i})^{-1}$$

は M^2 から $(M+1)^2$ の間での素数の間隔の平均である。これは2つの間隔の平均をつなげて $x = M^2 \rightarrow \infty$ に対して

$$\log M^2 \sim \prod_{p_i \leq M} (1 - \frac{1}{p_i})^{-1}$$

を与える。 $M^2 \leq p_\alpha, p_{\alpha-1} \leq (M+1)^2$ を最小の区間を与える素数とする。
 $K < 1$

$$\prod_{p_i \leq \sqrt{m}} (1 - \frac{1}{p_i})^{-1} \geq p_\alpha - p_{\alpha-1}$$

となる。分かりやすさのため $\log M^2$ で書き直すとこれより

$$p_\alpha - p_{\alpha-1} < \log M^2$$

となり題意を得る。(K が1より少ないとしてよい理由は $(M+1)^2 - M^2 = 2M+1 \gg \log M^2$ (M^2 が大きい場合。). 少ない M^2 に対しては実例で計算し、大きい M^2 には「平均的」性質が本質的である。.) \square

次を予想として述べる。

予想 1.

$$\prod_{p_i \leq \sqrt{m}} (1 - \frac{1}{p_i})^{-1} \leq \log m \text{ (for large } m)$$

$\prod_{p_i \leq 17} (1 - \frac{1}{p_i})^{-1} < \log 17^2$ は簡単にチェックできる。