リーマン予想～肯定的証明～
～Professional Version～

T.Nakashima
E-mail address
tainakashima@mbr.nifty.com

May 9, 2017

1

リーマン予想と同値な命題を扱う。リーマン予想のことを $R.H$ と書く。$\mu(n)$ はメビウス関数の事である。

定理 1.1.

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(n) = O(\sqrt{m}\log(m)) \Leftrightarrow R.H$$

この証明はここではしない。[1]H.M.Edwards を参照のこと。次の結果が重要である。

定理 1.2.

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(n) = O(\sqrt{m}\log(m)) \Rightarrow R.H$$

証明. $M(x)$ を次で定義する。

$$M(x) := \sum_{n=1}^{x} \mu(n)$$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum \frac{\mu(n)}{n^s}$$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \int_{x=0.1}^{\infty} \frac{1}{x^s} d(M(x))$$

$d(M(x))$ は $M(x)$ のスティルチェス積分である。

$$= [M(x)x^{-s}] + s\int_{x=0.1}^{\infty} M(x)x^{-s-1}$$

$$= s\int_{x=0.1}^{\infty} M(x)x^{-s-1}$$

ここでこの値が有限であるところまで $\frac{1}{\zeta(s)}$ を解析接続する。$M(x)$ $< O(\sqrt{x}\log(x))$ であるから $Re(s) \neq \frac{1}{2}$ では必ず収束する。そしてゼータ関数の自明でないゼロ点は無限に存在する事が知られているため $Re(s) = \frac{1}{2}$ 上で収束しない可能性がある。 □

補題 1.1.

$$\sum_{n|m} \mu(n) = 1 (m = 1)$$

$$\sum_{n|m} \mu(n) = 0 (m \neq 1)$$

証明. まず $m = 1$ ならば $\sum_{n|m} \mu(n) = \mu(1) = 1$ である。2 番目の場合。これは少し説明がいる。m の素因数分解を $m = {p_1}^{n_1}{p_2}^{n_2}{p_3}^{n_3}\cdots{p_k}^{n_k}$ とする。そうするとゼロになる項を除くと $\sum_{n|m} \mu(n) = {}_k\mathrm{C}_0 - {}_k\mathrm{C}_1 + {}_k\mathrm{C}_2 - {}_k\mathrm{C}_3 + \cdots {}_k\mathrm{C}_k = (1-1)^k = 0$ となる。 □

[] でガウス記号を表すものとする。

定理 1.3.

$$\sum_{n \leq m} \mu(n) \left[\frac{m}{n}\right] = 1$$

証明. 補題 2.1 より $\sum_{m'=1}^{m} \sum_{n|m'} \mu(n) = 1$ である。

$$\sum_{m'=1}^{m} \sum_{n|m'} \mu(n) = (\mu(1)) + (\mu(1) + \mu(2)) + (\mu(1) + \mu(3))$$

$$+(\mu(1) + \mu(2) + \mu(4)) + \cdots$$

この式の中の $\mu(n)$ を文字として見る。$\mu(1)$ は式の中に m 回登場する。$\mu(2)$ は m 以下の 2 の倍数の個数 $\left[\frac{m}{2}\right]$ 回登場する。$\mu(3)$ は m 以下の 3 の倍数の個数 $\left[\frac{m}{3}\right]$ 回登場する。$\mu(4)$ は m 以下の 4 の倍数の個数 $\left[\frac{m}{4}\right]$ 回登場する。一般にこの式の中で $\mu(n)(n < m)$ が登場する回数は m 以下の n の倍数の個数 $\left[\frac{m}{n}\right]$ である。つまり

$$1 = \sum_{m'=1}^{m} \sum_{n|m'} \mu(n) = (\mu(1)) + (\mu(1) + \mu(2)) + (\mu(1) + \mu(3))$$

$$+(\mu(1) + \mu(2) + \mu(4)) + \cdots = \sum_{n \leq m} \mu(n) \left[\frac{m}{n}\right]$$

となる。 □

定理 1.4.

$$\sum_{n \leq m} \mu(n) = O(\sqrt{m} \log(m))$$

証明. 最初に帰納法を使う。「$m_0 < M < m$ に対し $\sum_{1 \leq n \leq M} \mu(n)$ の絶対値の大きさが $\sqrt{M} \times \log \sqrt{M}$ の定数倍（K 倍）以下であるようにとれる。」という命題が成り立つと仮定する。この m_0 は十分に大きいようにとってあるものとする。定理 1.3 より

$$\sum_{n \leq \sqrt{m}} \mu(n) \left[\frac{m}{n}\right] + \sum_{\sqrt{m} < n \leq m} \mu(n) \left[\frac{m}{n}\right] = 1$$

帰納法を使ってよければ
$\sum_{n \leq \sqrt{m}} \mu(n)$ はリーマン予想の $\sqrt{m}$ 版である。従ってその大きさは $K m^{\frac{1}{4}} \log m^{\frac{1}{4}}$ である。
次の 2 式を得る。

$$\left| \sum_{n \leq \alpha_0} \mu(n) \left[\frac{m}{n}\right] \right| < \sqrt{m} m^{\frac{1}{4}} \log m^{\frac{1}{4}} \tag{1}$$

$$\left| \sum_{\alpha_0 < n \leq m} \mu(n) \left[\frac{m}{n}\right] \right| < (\sqrt{m} \times m^{\frac{1}{4}} \log m^{\frac{1}{4}} - 1) \tag{2}$$

(1) についてはこれは使わなくてよい。その代わりに

$$\left| \sum_{n \leq \alpha_0} \mu(n) \right| < \sqrt{m}$$

を使う。(2) について計算により次を得る。

$$\sum_{\alpha_0<n\leq m}\mu(n)\left[\frac{m}{n}\right]=(\left[\sqrt{m}\right]-1)\times\sum_{\alpha_0<n\leq m/\sqrt{m}-1}\mu(n)+(\left[\sqrt{m}\right]-2)\times$$

$$\sum_{m/\sqrt{m}-1<n\leq m/\sqrt{m}-2}\mu(n)+\cdots+1\times\sum_{m/2<n\leq m}\mu(n)$$

ここで $\frac{m}{\sqrt{m}-i+1}<\frac{m}{\log^2\sqrt{m}}$ であるような最大の i を取る。そしてプラスの項の要素とマイナスの項の要素を左辺に移項し左辺を変形する。このときに $(\sqrt{m}-1),(\sqrt{m}-2)\cdots,1$ はいじらないように。そして必ず 1 と -1 を同じ回数使うこと。最悪の場合の手段として左辺に移項してこれが $\sqrt{m}-1$ を越えるほどになったら最初の項に移項し $-(\sqrt{m}-1)$ を引く。といったことも考えられる。$\left|\sum_{\sqrt{m}<n\leq\frac{m}{\sqrt{m}-i+1}}\mu(n)\right|$ は絶対値の大きさが $\sqrt{m}$ の K 倍以下である。i に対応する項までと i に対応する項から後で別々に計算する。ここで $\sqrt{m}$ から i までの各項は絶対値の大きさが $\sqrt{m}$ の K 倍以下である。$\sqrt{m}$ の近くの 1 または -1 と最終項の 1 または -1 は影響が全然違うことと、$\sqrt{m}\times Km^{\frac{1}{4}}\log m^{\frac{1}{4}}-1>|\sum_{\sqrt{m}\leq n\leq\frac{m}{\sqrt{m}-i+1}}\mu(n)\left[\frac{m}{n}\right]+\sum_{\frac{m}{\sqrt{m}-i+1}<n\leq m}\mu(n)\left[\frac{m}{n}\right]|$ より、大体 i の前の項の合計と後の項の合計は後者が少ないことにより、キャンセルの後に i から m に対応する項までも絶対値の大きさが $\sqrt{m}$ の K 倍以下である。最後に大きく残った左辺 $\sqrt{m}\times Km^{\frac{1}{4}}\log m^{\frac{1}{4}}-1$ から変形したものをキャンセルし右辺に入れてしまう。これも $\sqrt{m}$ の近くの最初のほうの項の影響力が大きいことによる。さらに言うなら左辺の合計が右辺の合計と一致するため、上手に計算するとこれはできる。右辺のすべての項の絶対値が $\sqrt{m}$ の K 倍よりも少なくとれることが分かった。帰納法を完結する、「$m_0<M\leq m$ に対し（特に $M=m$ に対し）$\sum_{1\leq n\leq M}\mu(n)$ の絶対値の大きさが $\sqrt{M}\times\log\sqrt{M}$ の定数倍（K 倍）以下であるようにとれる。」は以下の計算により正しいことが分かる。これはリーマン予想である。
次のオーダーの性質は重要である。$f(x),g(x)$ が同じ符号の時

$$O(f(x)+g(x))=max(O|f(x)|,O|g(x)|)$$

$$(\left[\sqrt{m}\right]-1)\times\sum\mu(n)+(\left[\sqrt{m}\right]-2)\times\sum\mu(n)+\cdots+1\times\sum\mu(n)$$

これは右辺の各項の絶対値が $\sqrt{m}-1$ の K 倍を超えないようにしたもの（の右辺）である。

$$(\left[\sqrt{m}\right]-1)\times\sum\mu(n)$$

から考える。（むろんこれが0の場合もありうる。）$\sum \mu(n)$ は絶対値が $\sqrt{m}-1$ の K 倍以下の数である項に $\frac{1}{([\sqrt{m}]-1)}$ をかけたものよりも小さい。同じ作業をしていくと $\log\sqrt{m} \approx \frac{1}{([\sqrt{m}])} + \frac{1}{([\sqrt{m}]-1)} + \cdots + 1$ より次の式

$$\left|\sum_{\sqrt{m}<n\leq m}\mu(n)\right| < K((\sqrt{m}-1)\times\log\sqrt{m})$$

は明らかである。（ここでプラスの項の合計とマイナスの項の合計の大きいほうより大きさは少なくとれる。）

$$\sum_{n\leq m}\mu(n) = (\sum_{n\leq\alpha_0}\mu(n) + \sum_{\alpha_0\leq n\leq m}\mu(n))$$

$$= O(\sqrt{m}\log(\sqrt{m})) = O(\sqrt{m}\log(m))$$

を得る。 $\square$