少しだけ一般化されたリーマン予想の証明

T.Nakashima
E-mail address
tainakashima@mbr.nifty.com

October 8, 2017

1

次の結果を証明済みとして話を進める。

定理 1.1.

$$\sum_{n\leq x}\mu(n)=O(x^{\frac{1}{2}}\log x)$$

ここで $\mu(n)$ はメビウス関数である。μ は次で定義される。

定義 1.1.

$$\mu(n)=\begin{cases}\mu(n)=1 & \text{偶数個の素数の積}\\ \mu(n)=-1 & \text{奇数個の素数の積}\\ \mu(n)=0 & \text{ある素数の 2 乗で割れるとき}\end{cases}$$

さらにディリクレ指数 χ を定義する。a,b を任意の自然数としたとき次が成り立つ。

定義 1.2.

$$\begin{cases}a=b(modN)\Rightarrow\chi(a)=\chi(b)\\ \chi(a)\chi(b)=\chi(ab)\\ \chi(1)=1\\ \chi(a)=0(a\text{ と }N\text{ が互いに素でない時。})\end{cases}$$

一般化されたリーマン予想とはゼータ関数の自明でないゼロ点が $\frac{1}{2}$ 上にあるように次の L-関数のゼロ点が $\frac{1}{2}$ 上にあるというものである。これを以下 G.R.H と表記する。

定義 1.3. L-関数

$$\zeta_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

今から計算するのは一番簡単なときすなわち $N = 2$ の時である。計算すると

$$\chi(n) = \begin{cases} 1(n \text{ が奇数の時}) \\ 0(n \text{ が偶数の時}) \end{cases}$$

この場合しかありえない。
計算は省略するが次の結果が得られる。

定理 1.2.

$$G.R.H \Leftrightarrow \sum_{n \le x} \mu(n)\bar{\chi}(n) = O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$$

今の χ だと

$$\sum_{n \le x} \mu(n)\bar{\chi}(n) = \sum_{n:odd \le x} \mu(n)$$

であるから

$$\sum_{n \le x} \mu(n) = \sum_{n:odd \le x} \mu(n) + \sum_{n:even \le x} \mu(n)$$

$$\sum_{n \le x} \mu(n) = \sum_{n:odd \le x} \mu(n) + \mu(2) \sum_{n:odd \le x/2} \mu(n)$$

定理 1.1 より

定理 1.3.

$$\sum_{n \le x} \mu(n)\chi(n) = \sum_{n:odd \le x} \mu(n) = O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$$

を得る。つまりこの χ に関しては G.R.H が成り立つ。
さらに $N = 3$ で

$$\chi(n) = \begin{cases} 1(n = 3n + 1) \\ -1(n = 3n + 2) \\ 0(n = 3n) \end{cases}$$

の時。

$$\sum_{n\leq x}\mu(n)=\sum_{n=3m\leq x}\mu(n)+\sum_{n=3m+1\leq x}\mu(n)+\sum_{n=3m+2\leq x}\mu(n)$$

$\sum_{n=3m+1\leq x}\mu(n)$ と $\sum_{n=3m+2\leq x}\mu(n)$ は偶数だけで見ると $\mu(2)$ 倍でもう一方に移る。もちろん厳密に示さねばならない。

$$\mu(2)\sum_{n=3m+1\leq x/2}\mu(n)=\sum_{n=3m+2,n:even\leq x}\mu(n)$$

$$\mu(2)\sum_{n=3m+2\leq x/2}\mu(n)=\sum_{n=3m+1,n:even\leq x}\mu(n)$$

次は奇数の場合だが $\mu(7)$ の時だけやっておく。

$$\mu(7)\sum_{n=3m+1,n:odd\leq x/7}\mu(n)=\sum_{n=3m+1,n:7l,odd\leq x}\mu(n)$$

これでじゅうぶんかな？結果的に

$$\sum_{n\leq x}\mu(n)\bar{\chi}(n)=\sum_{n=3m+1\leq x}\mu(n)-\sum_{n=3m+2\leq x}\mu(n)=O(x^{\frac{1}{2}}\log x)$$

を得る。この場合も G.R.H が成り立つ。最後に

$$\sum_{n=3m+1\leq x}\mu(n)=O(x^{\frac{1}{2}}\log x)$$

を帰納的に使った。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<\log k$$

に注意しておこう。